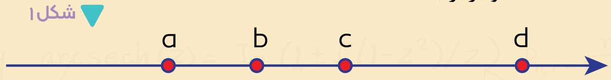
(قسمت سوم) داود معصومی‌مهوار

چکش کاری استدلال

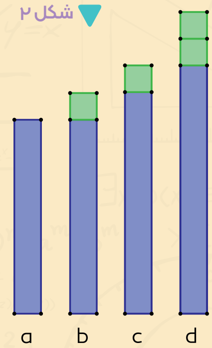
من: جلسهٔ پیش به این پرسش از آزمون پرداختیم:
روی محور عددها جای چهار عدد a، b، c و d نسبت به هم (شکل ۱) مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصلهٔ a تا b برابر با فاصلهٔ b تا c و برابر با نصف فاصلهٔ c تا d است.)

شکل ۱



در دو جلسهٔ پیش راه‌حل‌هایی برای این مسئله گفته شد. امروز می‌خواهم راهی را بیان کنم تا آن را نقد کنید. به کمک راهبرد رسم شکل این چهار عدد را کنار هم نشان می‌دهم.

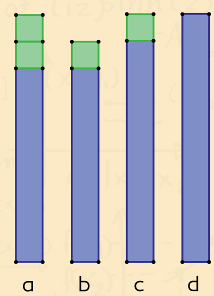
شکل ۲



چنان‌که در شکل ۲ می‌بینید، فرض‌های مسئله را نشان داده‌ام. اختلاف a و b درست به اندازهٔ اختلاف b و c است که با رنگ سبز نشان داده‌ام. اما اختلاف d و c دو برابر اختلاف c و b است که این مقدار دو برابر را با دو تکهٔ سبز رنگ نشان داده‌ام. حالا می‌خواهیم میانگین این چهار عدد را پیدا کنیم.

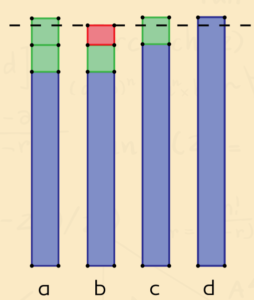
نفیسه: کاری کردید کارستان! چرا هیچ یک از ما چنین کاری نکردیم. فکر کنم بقیهٔ کار خیلی ساده و سرراست است. باید اضافهٔ دوتایی را از روی d برداریم و روی a بگذاریم (شکل ۳).

شکل ۳



الان a، c و d هر کدام به اندازهٔ یک تکهٔ سبز رنگ از b بیشتر هستند. پس اگر از هر کدام از آن‌ها به اندازهٔ یک چهارم تکهٔ سبز رنگ برداریم، هر کدام از b به اندازهٔ سه چهارم تکهٔ سبز رنگ بزرگ‌تر خواهند بود. بعد این سه تا یک چهارم را که با هم به اندازهٔ سه چهارم تکهٔ سبز رنگ هستند، به b اضافه می‌کنیم. به این ترتیب همه با هم برابر می‌شوند و این مقدار برابر میانگین آن‌ها خواهد شد.

شکل ۴



در شکل ۴، یک چهارم‌های اضافه بالای خط‌چین هستند و مقدار قرمز رنگ بالای b هم در واقع مجموع آن سه تا یک چهارم، یعنی سه چهارم است. با این حساب میانگین این چهار عدد از عدد c به اندازهٔ یک چهارم اختلاف c و b کوچک‌تر است. این همان چیزی است که با راه‌حل‌های گذشته پیدا کرده بودیم.

من: خب راه من هم همین بود. ممکن است این راه با تغییرات کوچکی بازسازی شود. مثلاً ممکن است کسی اختلاف هر عدد را با عدد قبلی رنگ نکند، بلکه اختلاف هر عدد با a را رنگ کند. این جزئیات را پیگیری نمی‌کنیم. همین راهی که نفیسه گفت خوب است. حالا نظرتان دربارهٔ این راه چیست؟

زهرا: خیلی واضح‌تر، روشن‌تر و ساده‌تر از راه‌های قبلی به نظر می‌رسد. شاید اگر همان اول این راه را می‌گفتید، بقیهٔ راه‌ها را گوش نمی‌کردیم!

نرگس (و چند نفر دیگر): اعتراف می‌کنم که بعضی از راه‌های قبلی را با چند بار مرور درک کردم، ولی این راه در همان آغاز، داستان را تمام و کمال تعریف کرد.

من: کسی نقدی به این راه حل ندارد؟ فقط به‌به و چه‌چه؟

ندا (پس از یک دقیقه): این راه خیلی شبیه همان راه حلی است که من به کمک شما پیدا کردم. من به کمک شما عدد اول را a، دومی را $b=a+s$، سومی را $c=a+2s$ و بالاخره عدد چهارم را $d=a+4s$ گرفتم. سپس میانگین را حساب کردم.

$$\text{میانگین}=\frac{(a)+(a+s)+(a+2s)+(a+4s)}{4}$$

$$=\frac{4a+7s}{4}=a+s+\frac{3s}{4}$$

به سادگی دیدیم که میانگین به مقدار $\frac{s}{4}$ از عدد سوم یعنی $a+2s$ کوچک‌تر است. در این راه جدید مقدار s با رنگ سبز نشان داده شده است و a با رنگ آبی. البته کمی تفاوت هم هست. در c و d مقدار رنگ آبی کمی بیشتر از a است و می‌توان این جزئیات را یکی کرد تا دو راه بسیار بسیار شبیه‌تر بیان شوند.

من: زنده باد! بچه‌ها این راه، راه جدیدی نیست. در واقع همان راه‌حل ندا در جلسهٔ پیش است که به جای بیان به وسیلهٔ عددها و متغیرها، با شکل بیان شده است. اما نکتهٔ بسیار مهمی وجود دارد که ممکن است از آن خوشتان نیاید: «این راه واقعاً یک راه ریاضی نیست.» راه درست و اساسی همان است که ندا گفت. این شکل‌ها را می‌توان روشی دانست که کمک می‌کند تا آن راه را بهتر درک کنیم.

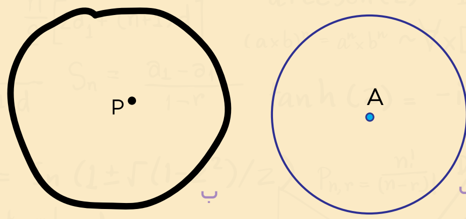
الهام: یعنی واقعاً تنها ارزش راهبرد رسم شکل «کمک به فهم فلان راه‌حل» است؟ بی‌انصافی نیست؟

من: بی‌انصافی نیست. توجه کنید که قضاوت از روی شکل راه و رسم مطمئنی نیست. در عوض بررسی و نتیجه‌گیری از روابط و عبارت‌های جبری روشی است که کاملاً بر دانسته‌های قبلی و قضیه‌ها مبتنی است. استدلال این است نه آن!

سایه: پس چرا خود ریاضی‌دان‌ها هندسه یا هندسهٔ مختصاتی را ابداع کرده‌اند؟

من: اتفاقاً هیچ یک از قضاوت‌ها در هندسهٔ اقلیدسی یا هندسهٔ دکارتی بر اساس آنچه که در شکل دیده می‌شود نیست! آنجا هم شکل وسیله‌ای است برای تفهیم یا انتقال بهتر مفهوم. هیچ بخشی از هیچ شکلی، موضوع هندسه نیست. وقتی شما از یک دایره می‌گویید، دربارهٔ موجودی حرف می‌زنید که در ذهن شما وجود دارد. صد البته می‌توانید آن را به کمک یکی از دو شکل الف و ب در شکل ۵ نیز توصیف کنید.

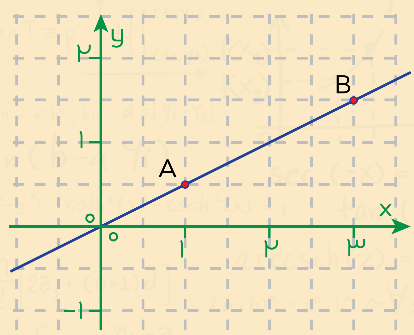
شکل ۵



ولی به یاد داشته باشید که هر دوی این‌ها نمایش دایره هستند نه خود دایره. تا وقتی که قبول داشته باشید هر یک از نقطه‌های این دو شکل فاصله‌شان تا مرکز مقدار ثابتی است، مشکلی در نمایش شما وجود ندارد. اگر هم واقعاً ویژگی‌های این دو شکل را بررسی و تأیید کنید که دایره ضخامت دارد یا ... همین‌جا تمام حرف‌های شما بیرون از هندسه می‌رود و به بررسی یک شکل واقعی مربوط می‌شود. ذهنی‌بودن موجودات هندسی، مانند نقطه، خط و دایره هم ضعفی برای هندسه نیست. ویژگی‌های شکل‌های هندسی در ذهن پیدا می‌شوند. سپس همین ذهن ما تلاش می‌کند تا در واقعیت چیزهای شبیه‌تری به موجودات ذهنی پیدا کند و از ویژگی‌های آن‌ها فایده ببرد. مثلاً چرخ را تا حد امکان گرد و شبیه دایره بسازد تا حرکت ساده‌تر انجام گیرد. یا در ساخت چرخ‌دنده از منحنی چرخزاد کمک بگیرد تا فرسایش دنده‌ها کمتر شود. این‌ها همه در ذهن پیدا و سپس در واقعیت شبیه‌سازی می‌شوند.

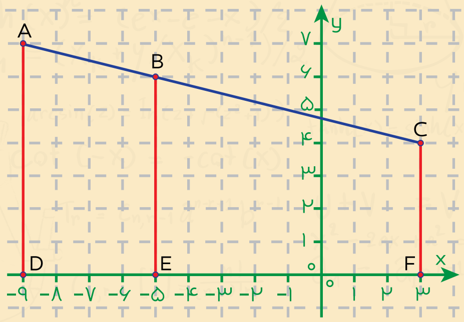
مورد سادهٔ دیگری مثال می‌زنم که تا حدی با آن آشنا هستید. در صفحهٔ مختصات دکارتی، نقطه‌هایی مانند $\begin{bmatrix} x \\ 0/5x \end{bmatrix}$ را روی خطی می‌دانند که از مبدأ مختصات می‌گذرد (شکل ۶).

شکل ۶



اینکه نقطه‌های مزبور همگی روی یک خط هستند، به این دلیل نیست که چشم ما چنین قضاوتی دارد. یا اگر حکم می‌کنند که این خط از مبدأ می‌گذرد، به این دلیل است که نقطهٔ صفر و صفر نیز ویژگی نقطه‌های این خط را دارد: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0/5\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. یا مثلاً در شکل ۷ به نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ توجه کنید.

شکل ۷



شاید چشم ما بی‌درنگ حکم کند که این سه نقطه در یک امتداد هستند، ولی در ریاضیات تنها وقتی این موضوع را می‌پذیرند که استدلالی برای آن آورده شود. مثلاً شما می‌توانید با توجه به مختصات نقطه‌ها سراغ مساحت ذوزنقه‌های ABED، BCFE و ACFD بروید و با مقایسهٔ آن‌ها مساحت مثلث ABC را تعیین کنید. این مثلث حتی اگر مساحتی کم و کوچک داشته باشد، در یک امتداد بودن A، B و C نقض می‌شود و اگر محاسبه‌ها مساحت مثلث را برابر با صفر نشان دهند، مطمئن خواهیم بود که این سه نقطه در یک امتداد هستند.

اعظم: خب محاسبه‌ای که گفتید کار ساده‌ای است. مثلاً ارتفاع ذوزنقهٔ ABED به سادگی برابر ۴ واحد و طول قاعده‌های آن ۶ و ۷ واحد است. به همین سادگی محاسبه‌ها را می‌توان ادامه داد:

$$S_{ABC} = \left|S_{ABED} + S_{BCFE} - S_{ACFD}\right| = \frac{(6+7)\times 4}{2} + \frac{(6+4)\times 8}{2} - \frac{(7+4)\times 12}{2} = 26 + 40 - 66 = 0$$

یعنی سه نقطهٔ A، B و C در یک امتداد هستند. ولی کنجکاوم بدانم دربارهٔ نقطه‌هایی که مختصات آن‌ها به صورت $\begin{bmatrix} x \\ 0/5x \end{bmatrix}$ هستند، چه می‌کنند. صحبت دربارهٔ بی‌شمار نقطه است! با دو سه مثال کار راه نمی‌افتد!

من ساکت بودم و چیزی نمی‌گفتم.

نرگس (پس از دو دقیقه): به گمانم کار ساده‌ای نیست، ولی پیچیده هم نیست. شاید روش ریاضی چنین باشد که باید سه تا نقطهٔ دلخواه مانند $\begin{bmatrix} p \\ 0/5p \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} q \\ 0/5q \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} r \\ 0/5r \end{bmatrix}$ را بگیریم و تکلیفشان را معین کنیم که در یک امتداد هستند یا نه. اگر مثلاً به همان روش محاسبهٔ مساحت ذوزنقه‌ها روشن شود که این سه نقطه در یک امتداد هستند، در واقع ما این کار را برای همهٔ نقطه‌هایی که به‌صورت $\begin{bmatrix} x \\ 0/5x \end{bmatrix}$ هستند، انجام داده‌ایم و می‌توانیم حکم کنیم که همهٔ این نقطه‌ها روی یک خط هستند.

من: عالی است. دارید استدلال‌کردن را یاد می‌گیرید.

برای دیدن دو قسمت قبل رمزینه را پویش کنید.